Паскалова теорема, пол и полара

верзија 2.0: 10.2.2015.

Душан Ђукић

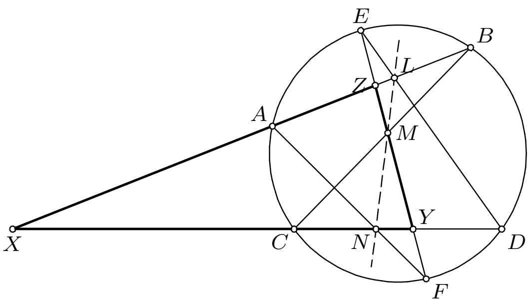
Теореме којима се овде бавимо су у ствари тврђења из пројективне геометрије, тако да имају и доказе унутар пројективне геометрије. Ипак, овде ћемо се задржати у еуклидској геометрији.

Почећемо са једним познатим тврђењем.

Т.1. (Паскалова теорема) Нека су A, B, C, D, E, F тачке на кругу. Праве AB и DE секу се у L, праве BC и EF у M, а CD и FA у N. Тада су тачке L, M, N колинеарне.

Доказ. Све дужи у овом доказу су оријентисане.

Нека се AB и CD секу у X, CD и EF у Y, а EF и AB у Z. Тачке L, M, N леже на страницама троугла XYZ, па можемо да применимо Менелајеву теорему: треба показати да је $\frac{ZL}{LX} \cdot \frac{XN}{NY} \cdot \frac{YM}{MZ} = -1$.



Радимо са $\triangle XYZ$ као базним троуглом.

Знамо да су тачке L, D, E на правој, па Менелајева теорема даје $\frac{XD}{DY}\frac{YE}{EZ} \cdot \frac{ZL}{LX} = -1$. И тачке C, M, B су колинеарне, па имамо и $\frac{XC}{CY} \cdot \frac{YM}{MZ} \cdot \frac{ZB}{BX} = -1$. Најзад, тачке N, F, A су колинеарне, па је $\frac{XN}{NY} \cdot \frac{YF}{FZ} \cdot \frac{ZA}{AX} = -1$.

Множењем ове три једнакости, користећи једнакости потенције $XD \cdot XC = XB \cdot XA$, $YD \cdot YC = YF \cdot YE$ и $ZF \cdot ZE = ZB \cdot ZA$, добијамо оно што нам треба. □

Паскалова теорема очигледно не захтева да $ABCDEF$ буде конвексан шестоугао, тако да су сви распореди тачака дозвољени.

Можемо да посматрамо и дегенерисане случајеве, када су неке две праве паралелне или се неке две тачке поклапају. На пример, ако је $A = B$, за праву AB узимамо тангенту на круг у A.

Т.2. У тетивном четвороуглу $ABCD$, праве AB и CD секу у E, BC и DA у F. Тангенте на описани круг у тачкама A и C се секу у P, а тангенте у B и D се секу у Q. Тада тачке E, F, P и Q леже на истој правој.

Доказ. Применимо Паскалову теорему на дегенерисани шестоугао $AABCCD$. Тачке $E = AB \cap CD$, $F = BC \cap DA$ и $P = AA \cap CC$ су колинеарне. Аналогно, и Q припада тој правој. □

Такође, будући да је Паскалова теорема тврђење из пројективне геометрије, треба да будемо спремни и на бесконачне тачке. Све бесконачне тачке леже на тзв. бесконачној правој.

Пример. Дате су тачке A, B, C, D, E, F на кругу. Ако је $AB \parallel DE$ и $BC \parallel EF$, доказати да је онда и $CD \parallel FA$.

Доказ. На основу Паскалове теореме, тачке $AB \cap DE$, $BC \cap EF$ и $CD \cap FA$ леже на истој правој. Међутим, како су прве две пресечне тачке бесконачне, то мора бити бесконачна права. Дакле, и трећа пресечна тачка ($CD \cap FA$) је бесконачна, тј. $CD \parallel FA$. △

Сада ћемо увести важне појмове пола и поларе.

Нека је дат круг $k(O,r)$. За тачку $P \neq O$ у равни, означимо са P^* инверзну слику тачке P у односу на круг k (тј. тачку на полуправој OP са $OP^* \cdot OP = r^2$).

Дефиниција. Полара тачке P у односу на круг k је права p кроз P^* нормална на OP^*. Обрнуто, тачка P је *пол* праве p.

Специјално, ако је тачка P ван круга k, њена полара је права MN, где су M и N додирне тачке тангенти из P на k.

Дефиниција. Пресликавање које сваку тачку слика у њену полару, а сваку праву у њен пол, зове се *поларно пресликавање*.

Поларно пресликавање је бијекција између скупа тачака и скупа правих у пројективној равни. Полара тачке O је бесконачна права, а полови правих кроз O су бесконачне тачке.

Следеће тврђење нам показује да поларно пресликавање чува инциденцију. Убрзо ће се испоставити да је то својство од кључне важности.

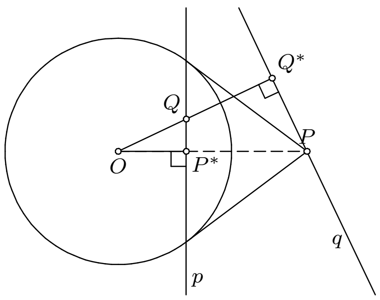
Т.3. Ако тачка P лежи на полари тачке Q у односу на дати круг k, онда и тачка Q лежи на полари тачке P.

Доказ. Троуглови OQ^*P и OP^*Q су слични. Ако је P на полари тачке Q, по дефиницији је $\sphericalangle OQ^*P = 90^\circ$, а тада је и $\sphericalangle OP^*Q = 90^\circ$, тј. Q је на полари тачке P. $\square$

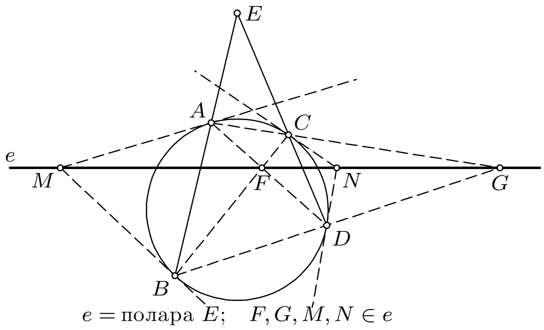
Значај ових појмова се најзад огледа у следећој теореми.

Т.4. Нека су A, B, C и D тачке на кругу k. Ако се праве AB и CD секу у E, BC и AD у F, и AC и BD у G, онда је EF полара тачке G (у односу на k).

Доказ. Означимо са M пресек тангенти на k у тачкама A и C, и са N пресек тангенти у B и D. Поларе тачака M и N су праве AC и BD редом, и те праве садрже G, па на основу Т.3 тачке M и N леже на полари тачке G. Следи да је MN полара тачке G. Међутим, по последици Т.1, тачке E и F леже на правој MN. $\square$



$p =$ полара P; $q =$ полара Q
$P \in q \Rightarrow Q \in p$



$e =$ полара E; $F, G, M, N \in e$

Т.5. (Брокарова теорема) Нека је четвороугао $ABCD$ уписан у круг k са центром O. Нека се праве AB и CD секу у тачки E, праве BC и DA у F, а AC и BD у G. Тада је O ортоцентар троугла EFG.

Доказ. На основу Т.4, права EF је полара тачке G, дакле $OG \perp EF$; аналогно $OE \perp FG$ и $OF \perp EG$. $\square$

Т.6. (Бријаншонова теорема) У тангентном шестоуглу $ABCDEF$, дијагонале AD, BE и CF се секу у једној тачки.

Доказ. Праве AD, BE и CF су конкурентне ако и само ако су њихови полови колинеарни.

Означимо са P, Q, R, S, T, U додирне тачке уписаног круга са AB, BC, CD, DE, EF, FA, редом. Поларе тачака A и D су редом праве UP и RS, што значи да је пол праве AD пресек $UP \cap RS$. Аналогно, полови правих BE и CF су тачке $PQ \cap ST$ и $QR \cap TU$. Ова три пола леже на истој правој по Паскаловој теореми, чиме је доказ завршен. $\square$

Бријаншонова и Паскалова теорема су *дуалне*, јер се једна из друге добија поларним пресликавањем.

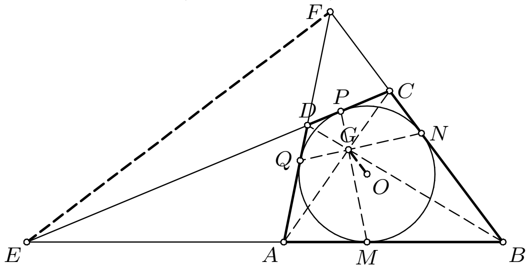
И овде можемо да посматрамо дегенерисани случај када су нека од темена шестоугла на кругу.

Пример. Нека су D, E, F додирне тачке уписаног круга $\triangle ABC$ са страницама BC, CA, AB редом. Бријаншонова теорема на дегенерисаном шестоуглу $AFBDCE$ нам даје да се AD, BE и CF секу у једној тачки (тзв. *Жергоновој* тачки).

Последица. Ако уписани круг тангентног четвороугла $ABCD$ додирује странице AB, BC, CD, DA редом у тачкама M, N, P, Q, онда се праве AC, BD, MP и NQ секу у једној тачки.

Доказ. Применом Бријаншонове теореме на дегенерисани шестоугао $AMBCPD$ добијамо да MP пролази кроз пресек дијагонала AC и BD. Аналогно, и NQ пролази кроз ту тачку. □

Посматрајмо сада тангентни четвороугао $ABCD$ и његов уписани круг k, и означимо са E, F, G пресеке правих AB са CD, BC са DA, и AC са BD, редом. Нека k додирује странице AB, BC, CD и DA редом у тачкама M, N, P и Q. По Бријаншоновој теореми, тачка G је на правој MP. Како је MP полара тачке E (у односу на k), то тачка E лежи на полари тачке G. Аналогно и F лежи на тој полари. Према томе:



Т.7. Нека је $ABCD$ четвороугао описан око круга k са центром O. Ако се праве AB и CD секу у E, BC и DA у F, а AC и BD у G, онда је EF полара тачке G. Одавде је $OG \perp EF$. □

Овде *не можемо* по аналогији да закључимо да је и $OE \perp FG$ (нити је то тачно), јер је редослед тачака A, B, C, D битан: $ABCD$ је тангентан четвороугао, али $ACBD$ то није.

Последица. У тангентном трапезу $ABCD$ ($AB \parallel CD$) који није ромб, права OG је нормална на AB, где је O центар уписаног круга и G пресек дијагонала.

Доказ. Следи из Т.7 у дегенерисаном случају. Овде је тачка $E = AB \cap CD$ бесконачна, па је $EF \parallel AB$. □

Задаци

1. Нека је P тачка у унутрашњости троугла ABC. Означимо са P_1 и P_2 редом подножја нормала из P на AC и BC, и са Q_1 и Q_2 редом подножја нормала из C на AP и BP. Доказати да се праве Q_1P_2, Q_2P_1 и AB секу у једној тачки.

2. У оштроуглом троуглу ABC, тангенте из A на круг k над пречником BC додирују тај круг у P и Q. Доказати да су тачке P и Q и ортоцентар H колинеарне.

3. Нека су AD и BE висине троугла ABC и H његов ортоцентар. Означимо са M средиште дужи CH и са N пресек правих DE и CH. Доказати да је N ортоцентар троугла ABM.

4. Дате су тачке P и Q на полукругу над пречником UV, при чему је $UP < UQ$. Тангенте на полукруг у P и Q секу се у R, а праве UP и VQ секу се у S. Доказати да је $RS \perp UV$.

5. Троугао ABC је уписан у круг Γ. Одабрана је тачка M на симетрали угла A, унутар троугла. Праве AM, BM и CM поново секу Γ у A_1, B_1 и C_1 редом. Нека права A_1C_1 сече AB у P, а A_1B_1 сече AC у Q. Доказати да је $PQ \parallel BC$.

6. Нека је $ABCD$ тетиван и тангентан четвороугао, а $\Gamma(O, R)$ и $\gamma(I, r)$ његов описан и уписан круг, редом. Дијагонале AC и BD секу се у E. Доказати да су тачке E, I, O колинеарне.

7. Уписани круг троугла ABC додирује странице BC, CA, AB редом у тачкама D, E, F. Права кроз A паралелна правој EF сече DF у K. Ако је P средиште дужи EF, доказати да је $IK \perp BP$.

8. Тачка C је одабрана на пречнику AB круга k са центром O, уз распоред $A - B - C$. Права кроз C сече k у тачкама D и E. Нека је OF пречник круга OBD. Ако CF поново сече круг k у тачки G, доказати да су тачке O, A, E, G концикличне.

9. Уписани круг троугла ABC додирује странице BC, CA, AB редом у тачкама D, E, F. Нека је $P = EF \cap BC$, $Q = FD \cap CA$ и $R = DE \cap AB$. Ако је I центар уписаног круга и $G = AD \cap BE \cap CF$ Жергонова тачка, доказати да тачке P, Q, R леже на правој нормалној на IG.

10. У троуглу ABC, I је центар уписаног круга ω, а H ортоцентар троугла BIC. Доказати да је полара тачке H у односу на круг ω средња линија троугла ABC.

11. Круг k уписан у троугао ABC додирује страницу AB у тачки F. Нека је I центар круга k, M средиште странице AB, и H ортоцентар троугла BIC. Доказати да је права HF нормална на IM.

12. Дате су различите тачке A и B на кругу k. Тетива CD пролази кроз средиште M тетиве AB. Нека се AC и BD секу у K. Права KM сече k у I и H, уз распоред $K - I - M - H$. Ако се AI и BH секу у L, доказати да су K, I, D и L на једном кругу.

13. Конвексан четвороугао $ABCD$ је уписан у круг са центром O. Дијагонале AC и BD се секу у E. Ако је P тачка унутар $ABCD$ таква да је $\sphericalangle PAB + \sphericalangle PCB = \sphericalangle PBC + \sphericalangle PDC = 90^\circ$, доказати да су тачке O, E и P колинеарне.

14. У троуглу ABC, тачке D и E на правој AB су такве да је $D - A - B - E$ и $AD = AC$, $BE = BC$. Означимо са M и N редом средишта лукова AC и BC описаног круга $\triangle ABC$ који не садрже треће теме. Праве DM и CA се секу у P, а праве EN и CB се секу у Q. Доказати да центар уписаног круга I троугла ABC лежи на правој PQ.

Решења

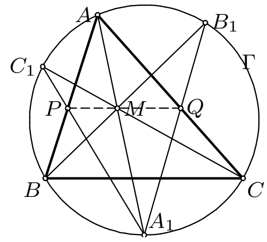
1. Тачке P_1, P_2, Q_1, Q_2 леже на кругу над пречником PC. По Паскаловој теореми у шестоуглу $P_1PP_2Q_1CQ_2$, тачке пресека парова правих P_1C, PQ_1 (пресек A), P_1Q_2, P_2Q_1 (пресек X) и PQ_2, P_2C (пресек B) су колинеарне.

2. Подножја B', C' висина из B и C редом леже на k. Права PQ је полара тачке $A = BC' \cap CB'$, и по Т.5 за четвороугао $BCB'C'$ она садржи тачку $BB' \cap CC' = H$.

3. Четвороугао $CDHE$ је уписан у круг чији је центар M. Зато тврђење следи из Т.5 за овај четвороугао.

4. Означимо са K пресек PQ и UV. По Т.4, полара тачке K садржи S. Такође, K је на правој PQ, а то је полара тачке R, одакле је, по Т.3, R на полари тачке K. Следи да је RS полара тачке K, па је $RS \perp UV$.

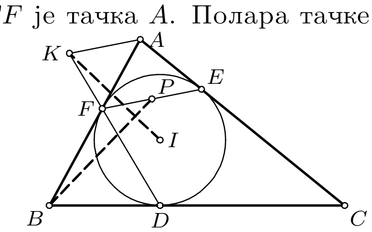
5. На основу Паскалове теореме на шестоуглу $BACC_1A_1B_1$, тачке P, Q и $M = BB_1 \cap CC_1$ су колинеарне.



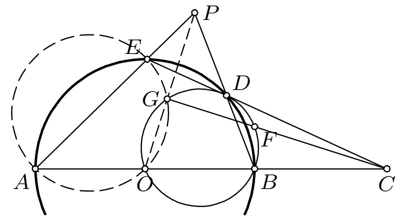
Даље, по услову задатка, A_1 је средиште лука BC, па је тангента t у A_1 паралелна BC. Сада применимо Паскалову теорему на $ABCC_1A_1A_1$: тачке $P = AB \cap A_1C_1$, $M = AA_1 \cap CC_1$ и бесконачна тачка $t \cap BC$ су на правој, тј. праве t, BC и PM припадају истом прамену, што значи да је $PM \parallel BC$, дакле $PQ \parallel BC$.

6. Означимо $F = AB \cap CD$ и $G = BC \cap DA$. На осниву Т.4 и Т.7, полара тачке E у односу на ма који од кругова Γ и γ је права FG, па су праве IE и OE нормалне на FG, и тврђење одмах следи.

7. Применимо поларно пресликавање. Пол праве EF је тачка A. Полара тачке P пролази кроз A и нормална је на IP, дакле то је права AK јер је $AK \parallel EF$; другим речима, P је пол праве AK. Пол праве DF је тачка B, одакле добијамо да је пол тачке $K = AK \cap DF$ права BP, па је $IK \perp BP$.



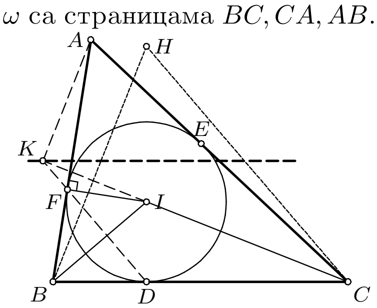
8. Праве FB и FD су тангенте на круг k, па је BD полара тачке F и она садржи тачку P. Следи да полара p тачке P садржи тачку F, а знамо да $C \in p$, па је p права CFG. Притом је $p \perp OP$, па због $\sphericalangle OGF = 90^\circ$ следи да су тачке O, G и P колинеарне.



Сада је $PA \cdot PE = PB \cdot PD = PO \cdot PG$, одакле следи да су A, E, G и O на истом кругу.

9. Праве EF и BC су поларе тачака A и D редом у односу на уписани круг, па је њихов пресек P пол праве AD. Полара тачке G садржи тачку P, и аналогно садржи тачке Q и R, дакле PQR је полара тачке G и нормална је на IG.

10. Означимо са D, E и F редом додирне тачке круга ω са страницама BC, CA, AB. Одредимо пол K праве BH. Како је $BH \perp CI$, тачка K је на правој CI. Такође, пошто је полара тачке B права DF, тачка K је на правој DF, тј. $K = DF \cap CI$. Тада је $\sphericalangle IKD = \sphericalangle KDB - \sphericalangle KCB = 90^\circ - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha}{2} = \sphericalangle IAF$, што значи да су тачке A, I, K, F концикличне, и одатле $\sphericalangle IKA = \sphericalangle IFA = 90^\circ$. Тачка симетрична тачки A у односу на K (тј. у односу на праву CI) лежи на правој BC, одакле следи да је K на средњој линији троугла ABC паралелној са BC.



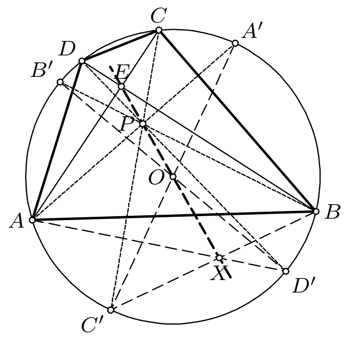
Слично, пол L праве CH лежи на истој средњој линији, а полара тачке H је права KL, тј. поменута средња линија.

11. По претходном задатку, M је на полари тачке H, па полара тачке M садржи тачку H и подножје тангенте F, дакле то је права FH, и тврђење одмах следи.

12. На основу Т.4, полара тачке M садржи тачке K и L, тј. то је права KL. То значи да је $OM \perp KL$, где је O центар круга, па како је још $OM \perp AB$, следи $KL \parallel AB$. Сада је $\sphericalangle KLI = \sphericalangle BAI = \sphericalangle BDI = \sphericalangle KDI$, одакле следи тврђење.

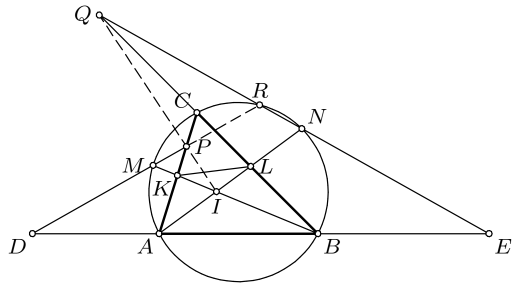
13. Нека полуправе AP, BP, CP и DP редом секу описани круг четвороугла $ABCD$ у

тачкама A', B', C' и D'. По услову задатка је $90^\circ = \sphericalangle PAB + \sphericalangle PCB = \sphericalangle A'AB + \sphericalangle BAC'$, што значи да је $A'C'$ пречник круга; аналогно је и $B'D'$ пречник.



На основу Паскалове теореме у шестоуглу $AA'C'BB'D'$, тачке $AA' \cap BB' = P$, $A'C' \cap B'D' = O$ и $C'B \cap D'A = X$ су колинеарне. С друге стране, Паскалова теорема у шестоуглу $ACC'BDD'$ даје колинеарност тачака E, O и X, што завршава доказ.

14. Нека BM и AN секу наспрамне странице троугла редом у K и L. Из сличности троуглова BCM и BKA ($\sphericalangle BMC = \sphericalangle BAK$, $\sphericalangle CBM = \sphericalangle KBA$) имамо $BK \cdot BM = BA \cdot BC$; осим тога, због $CD \parallel AL$ важи $BA/BD = BL/BC$. Следи $BK \cdot BM = BL \cdot BD$, што заједно са $\sphericalangle DBM = \sphericalangle KBL$ даје $\triangle BDM \sim \triangle BKL$. Аналогно, $\triangle AEN \sim \triangle ALK$.



Нека се праве DM и EN секу у R. Добијене сличности дају $\sphericalangle RDE = \sphericalangle MDB = \sphericalangle LKB$ и $\sphericalangle DER = \sphericalangle AEN = \sphericalangle ALK$, тако да је $\sphericalangle NRM = 180^\circ - \sphericalangle RDE - \sphericalangle DER = 180^\circ - \sphericalangle LKB - \sphericalangle ALK = \sphericalangle KIL = \sphericalangle BIA = 180^\circ - \sphericalangle IAB - \sphericalangle ABI = 180^\circ - \sphericalangle CAN - \sphericalangle MBC = \sphericalangle NCM$ (углови су оријентисани). Према томе, R је на описаном кругу $\triangle ABC$. Сада колинеарност тачака I, P, Q следи из Паскалове теореме за тачке $A, B, R; M, N, C$.

Београд, 2012-2015